

Zarflamalı (Dual) Doğrusal Programlama Modelleri

Bir doğrusal programlama modeli için, aynı veriler kullanılarak farklı bir doğrusal programlama modeli formüle etmek mümkündür. Orjinal primal (birincil) model ya da dual (ikincil) modelin çözümü modellenen problem hakkında aynı bilgiyi vermektedir.

Kesirli programlama ve primal doğrusal programlama modellerinde, referans olacak karar birimlerinin hesaplanması güçtür. Bulunan ağırlık değerlerinin tüm kısıtlarda yerine konması ve sonucu "0" olan kısıtlayıcılara ait karar birimlerinin referans kümesine dahil edilmesi gerekmektedir. Zarflamalı (Dual) VZA modeli bu güçlüğü ortadan kaldırmaktadır ve dual değişkenler yardımı ile referans olacak karar birimleri ek bir hesaplamaya gerek kalmadan bulunabilmektedir.

Zarflamalı VZA modeli ile radyal olarak ölçülemeyen fakat azaltılması veya arttırılması mümkün olan girdi veya çıktı miktarları hesaplanabilmektedir. Zarflamalı VZA modellerinde girdiye ve çıktıya yönelik doğrusal programlama modellerinin dualleri alındığından amaç fonksiyonlarının yönü de değişmektedir.

Girdiye Yönelik Zarflamalı Doğrusal Programlama Modeli

Dual doğrusal programlama modeli ile parçalı doğrusal bir üretim yüzeyi, yani etkinlik sınırı belirlenmektedir. Girdiye yönelik doğrusal programlama modelinin duali, gerçek etkinlik sınırının parçalı doğrusal bir benzerini, m tane girdinin miktarlarını, s tane çıktının üretim seviyesini karşılamak için minimum yaparak kurmaktadır. Diğer bir deyişle; girdiye yönelik model, belirli bir çıktıyı üretmek için gerekli minimum girdi miktarının hesaplanmasını sağlamaktadır.

Girdiye yönelik ağırlıklı primal modelden zarflamalı dual modele geçiş aşamasında dual problemin değişkenleri, negatif olmayan bir gerçek değişken α ve negatif olmayan bir vektör $\lambda (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ ile ifade edilmektedir. Primal ve dual kısıtlayıcılar arasındaki ilişki aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

Primal Değişken	Primal Kısıtlayıcı	Dual Değişken	Dual Kısıtlayıcı
$v_{ik} \geq \varepsilon$	$\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ik} = 1$	α	$\alpha X_{ik} - \sum_{j=1}^n X_{ij} \lambda_j \geq 0$
$u_{rk} \geq \varepsilon$	$\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij} \leq 0$	λ_j	$\sum_{j=1}^n Y_{rj} \lambda_j \geq Y_{rk}$

Girdiye yönelik ağırlıklı VZA modelinin duali olan zarflamalı model aşağıdaki şekilde kurulmaktadır:

$$F_k = \text{Minimum } \alpha$$

$$\alpha X_{ik} - \sum_{j=1}^n X_{ij} \lambda_j \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n Y_{rj} \lambda_j \geq Y_{rk}$$

$$\lambda_j \geq 0$$

Zarflamalı VZA modelinde aylak değişkenlerin değeri oldukça önemlidir. Çünkü bir karar biriminin etkin olabilmesi için $\alpha = 1$, $\lambda_k = 1$, $\lambda_j = 0$ ve aylak değişkenlerin değeri de sıfıra eşit olmalıdır. Bu nedenle aylak değişkenlerin de sıfıra eşit olup olmadıklarının kontrol edilmesi gerekmektedir. Modeldeki kısıtlayıcıların \geq işaretlerinin = haline dönüşümünü sağlayacak olan aylak değişkenler (s_i^- , s_r^+) kısıtlayıcılardan çıkarılmalıdır.

Ayrıca amaç fonksiyonunda $-\varepsilon(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+)$ teriminin yer alması gerekmektedir. Eğer aylak değişkenlerin değeri sıfırdan farklı ise α değeri 1'e eşit olsa dahi aylak değişken değerleri $-\varepsilon$ ile çarpıldığı için etkinlik değeri 1'in altına inmektedir. Amaç fonksiyonu değerinin 1'in altına inmesi de söz konusu karar biriminin etkin olmamasına neden olmaktadır. Böylece, göreceli etkinliğin gerçekleşmesi için gerekli olan, etkinlik değerinin 1 ve aylak değişken değerlerinin sıfır olması koşulu amaç fonksiyonuna dahil edilmiş olmaktadır.

Aylak değişkenler modele girdiğinde girdiye yönelik zarflamalı VZA modeli aşağıdaki şekilde oluşmaktadır:

$$E_k = \text{Minimum } \alpha - \left(\varepsilon \sum_{i=1}^m s_i^- \right) - \left(\varepsilon \sum_{r=1}^s s_r^+ \right)$$

$$\sum_{j=1}^n (X_{ij} \lambda_j) + s_i^- - (\alpha X_{ik}) = 0 \quad ; \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n (Y_{rj} \lambda_j) - s_r^+ - Y_{rk} = 0 \quad ; \quad r=1, \dots, s$$

α : Girdiye ait büzülme katsayısını (girdilerin ortalama azaltılma miktarı),

s_i^- : k karar biriminin i'inci girdisine ait atıl değerini (radyal olarak ölçülemeyen fakat azaltılması mümkün olan atıl girdi miktarı),

s_r^+ : k karar biriminin r'inci çıktısına ait serbestlik (gevşeklik) değerini (radyal olarak ölçülemeyen fakat arttırılması mümkün olan çıktı miktarı),

λ_j : Gözlem kümesindeki karar birimlerinin aldıkları yoğunluk değerlerini göstermektedir.

Amaç fonksiyonu, α 'yı (büzülme katsayısı) k karar birimi için minimum yapmaktadır. k karar biriminin etkin olarak nitelen- dirilebilmesi için aşağıdaki koşulların gerçekleşmesi gerekmektedir:

$$\alpha = 1, s_i^- = 0, s_r^+ = 0, \lambda_k = 1, E_k = 1$$

Eğer, α 1'den küçük ise, bu durum ilgili karar biriminin etkin olabilmesi için girdilerini hala azaltabileceği anlamına gelmektedir. VZA'da etkinlik, yalnızca görel bir ölçüttür. Yani, etkin olan karar birimleri, etkin olmayan karar birimlerinden daha iyi performans göstermektedirler. Eğer bir karar birimi etkin değilse, girdiye yönelik zarflamalı VZA modeli, atıl girdi ve serbest çıktı miktarlarını aşağıdaki şekilde tanımlamaktadır:

$$\text{Atıl Girdi : } s_i^- = \alpha X_{ik} - \sum_{j=1}^n X_{ij} \lambda_j$$

$$\text{Serbest Çıktı : } s_r^+ = \sum_{j=1}^n Y_{rj} \lambda_j - Y_{rk}$$

Optimal girdiler ve çıktılar (sanal girdiler ve çıktılar), yani her karar birimi için referans olarak belirlenen girdi ve çıktı değerleri, etkin olan karar birimlerinin doğrusal kombinasyonlarından oluşmaktadır. Her karar birimi için kurulan modelde, λ değeri sıfırdan farklı olan etkin karar birimleri, ilgili karar biriminin referans kümesini oluşturmaktadır. Referans karar birimleri aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

$$\text{Sanal Girdi : } \sum_{j=1}^n X_{ij} \lambda_j$$

$$\text{Sanal Çıktı : } \sum_{j=1}^n Y_{rj} \lambda_j$$

Burada, j'inci karar birimleri, etkin olmayan karar biriminin referans kümesinde yer alan karar birimleridir. Girdiye yönelik zarflamalı VZA modeli, bankaların etkinliğinin ölçüldüğü aşağıdaki örnek üzerinde incelenebilir. A, B, C ve D bankalarının girdi ve çıktı miktarları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

Banka	Girdiler			Çıktılar	
	İşgücü	Sermaye(trl)	Mevduat(trl)	Toplam Krediler(trl)	Net Kar(trl)
A	200	20	40	15	12
B	150	22	42	18	15
C	165	40	35	25	18
D	215	35	50	18	13

A bankasına ait girdiye yönelik zarflamalı VZA modeli aşağıdaki şekilde kurulmaktadır:

$$E_A = \text{Minimum } \alpha - \varepsilon (s_1^- + s_2^- + s_3^- + s_1^+ + s_2^+)$$

$$200 \lambda_A + 150 \lambda_B + 165 \lambda_C + 215 \lambda_D + s_1^- - 200 \alpha = 0$$

$$20 \lambda_A + 22 \lambda_B + 40 \lambda_C + 35 \lambda_D + s_2^- - 20 \alpha = 0$$

$$40 \lambda_A + 42 \lambda_B + 35 \lambda_C + 50 \lambda_D + s_3^- - 40 \alpha = 0$$

$$15 \lambda_A + 18 \lambda_B + 25 \lambda_C + 18 \lambda_D - s_1^+ - 15 = 0$$

$$12 \lambda_A + 15 \lambda_B + 18 \lambda_C + 13 \lambda_D - s_2^+ - 12 = 0$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, s_1^-, s_2^-, s_3^-, s_1^+, s_2^+ \geq 0$$

Modelin çözümü yapıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir:

$$E_A = 0,9167, \alpha = 0,9167, \lambda_A = 0, \lambda_B = 0,833, \lambda_C = 0, \lambda_D = 0$$

$$s_1^- = 58,3333, s_2^- = 0, s_3^- = 1,6667, s_1^+ = 0, s_2^+ = 0,5$$

Elde edilen sonuçlara bakıldığında, A bankasının görece teknik etkinliğe sahip olmadığı söylenebilmektedir. Görece etkinlik değeri %91,67 dir. A bankasının referans kümesine dahil olacak karar birimi ise B bankasıdır. Çünkü, λ değeri sıfırdan farklı olan karar birimi görece etkin olmayan

karar biriminin referans kümesine dahil olmaktadır. A bankası için olması gereken yani sanal girdi ve çıktı miktarları ise aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır.

$$\text{Sanal Girdiler} = (150, 22, 42) * (0,833) = (125, 18, 35)$$

$$\text{Sanal Çıktılar} = (18, 15) * (0,833) = (15, 12,5)$$

A bankasının diğer bankalar arasında görel olarak etkin hale gelebilmesi için girdi ve çıktı miktarlarının aşağıdaki şekilde olması gerekmektedir. A bankası girdi ve çıktı miktarlarını, B bankasının girdi ve çıktı miktarlarının doğrusal bir kombinasyonu olan miktarlarda ayarlaması halinde A bankasının etkinlik değeri % 100'e ulaşacaktır.

Banka	Girdiler			Çıktılar	
	İşgücü	Sermaye(trl)	Mevduat(trl)	Toplam Krediler(trl)	Net Kar(trl)
A	125	18	35	15	12,5

Çıktıya Yönelik Zarflamalı Doğrusal Programlama Modeli

Çıktıya yönelik doğrusal programlama modelinin duali, yani çıktıya yönelik zarflamalı VZA modeli, belirli bir girdi miktarı ile üretilebilecek çıktı miktarını maksimum yapacak şekilde kurulmaktadır. Çıktıya yönelik modelde, her bir çıktının miktarı, başka herhangi bir girdi miktarı artırılmadan veya herhangi bir diğer çıktı miktarı azaltılmadan artırılmıyorsa, söz konusu karar biriminin görel olarak etkin olduğu söylenebilmektedir.

Çıktıya yönelik ağırlıklı primal modelden zarflamalı dual modele geçiş aşamasında dual problemin değişkenleri, negatif olmayan bir gerçek değişken μ ve negatif olmayan bir vektör θ ($\theta_1, \dots, \theta_n$)T ile ifade edilmektedir. Primal ve dual kısıtlayıcılar arasındaki ilişki aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

Primal Değişken	Primal Kısıtlayıcı	Dual Değişken	Dual Kısıtlayıcı
$u_{rk} \geq \varepsilon$	$\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk} = 1$	μ	$\mu Y_{rk} - \sum_{j=1}^n Y_{rj} \theta_j \leq 0$
$v_{ik} \geq \varepsilon$	$\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij} - \sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj} \geq 0$	θ_j	$\sum_{j=1}^n X_{ij} \theta_j \leq X_{ik}$

Çıktıya yönelik ağırlıklı VZA modelinin duali olan zarflamalı model aşağıdaki şekilde kurulmaktadır:

$$F_k = \text{Maksimum } \mu$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} \theta_j \leq X_{ik}$$

$$\mu Y_{rk} - \sum_{j=1}^n Y_{rj} \theta_j \leq 0$$

$$\theta_j \geq 0$$

Çıktıya yönelik zarflamalı VZA modelinde de ilgili karar birimlerinin etkin durumda olabilmesi için aylak değişkenlerin değerleri sıfır olmalıdır. Modeldeki kısıtlayıcılar için \leq işaretlerinin $=$ haline dönüşümünü sağlayacak olan aylak değişkenler (σ_i^- , σ_r^+) kısıtlayıcılara eklenmelidir.

Ayrıca amaç fonksiyonunda $+\varepsilon(\sum_{i=1}^m \sigma_i^- + \sum_{r=1}^s \sigma_r^+)$ teriminin yer alması gerekmektedir. Eğer aylak değişkenlerin değeri sıfırdan farklı ise μ değeri 1'e eşit olsa dahi aylak değişken değerleri ε ile çarpıldığı için etkinlik değeri 1'in üzerine çıkmaktadır. Amaç fonksiyonu değerinin 1'in üzerine çıkması da ilgili karar biriminin etkin olmamasına neden olmaktadır. Böylece, görelî etkinliğin gerçekleşmesi için gerekli olan, etkinlik değerinin 1 ve aylak değişken değerlerinin sıfır olması koşulu amaç fonksiyonuna dahil edilmiş olmaktadır.

Aylak değişkenler modele girdiğinde girdiye yönelik zarflamalı VZA modeli aşağıdaki şekilde oluşmaktadır:

$$F_k = \text{Maksimum } \mu + \left(\varepsilon \sum_{i=1}^m \sigma_i^- \right) + \left(\varepsilon \sum_{r=1}^s \sigma_r^+ \right)$$

$$\sum_{j=1}^n (X_{ij} \theta_j) + \sigma_i^- - X_{ik} = 0 ; \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n (Y_{rj} \theta_j) - \sigma_r^+ - (\mu Y_{rk}) = 0 ; \quad r = 1, \dots, s$$

Burada;

μ : Çıktıya ait genişleme katsayısını,

σ_i^- : k karar biriminin i'inci girdisine ait atıl değerini,

σ_r^+ : k karar biriminin r'inci çıktısına ait serbestlik (gevşeklik) değerini,

θ_j : Gözlem kümesindeki karar birimlerinin aldıkları yoğunluk değerlerini göstermektedir.

Amaç fonksiyonu, μ 'yü (genişleme katsayısı) k karar birimi için maksimum yapmaktadır. k karar biriminin etkin olarak nitelendirilebilmesi için aşağıdaki koşulların gerçekleşmesi gerekmektedir:

$$\mu = 1, \sigma_i^- = 0, \sigma_r^+ = 0, \theta_k = 1, F_k = 1$$

Eğer μ 1'den büyük ise, bu durum ilgili karar biriminin görece etkin hale gelebilmesi için çıktıların hala artırılabilirliğini göstermektedir. Çıktıya yönelik zarflamalı VZA modelinde sanal girdi ve çıktı değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

$$\text{Sanal Girdi} : \sum_{j=1}^n X_{ij} \theta_j$$

$$\text{Sanal Çıktı} : \sum_{j=1}^n Y_{rj} \theta_j$$

Eğer bir karar birimi etkin değilse, çıktıya yönelik zarflamalı VZA modeli, atıl girdi ve serbest çıktı miktarlarını aşağıdaki şekilde tanımlamaktadır:

$$\text{Atıl Girdi} : \sigma_i^- = X_{ik} - \sum_{j=1}^n X_{ij} \theta_j$$

$$\text{Serbest Çıktı} : \sigma_r^+ = \sum_{j=1}^n Y_{rj} \theta_j - \mu Y_{rk}$$

Çıktıya yönelik zarflamalı VZA modeli, banka modelinde B bankasının görece etkinlik modeli kurularak incelenebilir:

Banka	Girdiler			Çıktılar	
	İşgücü	Sermaye(trl)	Mevduat(trl)	Toplam Krediler(trl)	Net Kar(trl)
A	200	20	40	15	12
B	150	22	42	18	15
C	165	40	35	25	18
D	215	35	50	18	13

$$F_B = \text{Maksimum } \mu + \varepsilon (\sigma_1^- + \sigma_2^- + \sigma_3^- + \sigma_1^+ + \sigma_2^+)$$

$$200 \theta_A + 150 \theta_B + 165 \theta_C + 215 \theta_D + \sigma_1^- - 150 = 0$$

$$20 \theta_A + 22 \theta_B + 40 \theta_C + 35 \theta_D + \sigma_2^- - 22 = 0$$

$$40 \theta_A + 42 \theta_B + 35 \theta_C + 50 \theta_D + \sigma_3^- - 42 = 0$$

$$15 \theta_A + 18 \theta_B + 25 \theta_C + 18 \theta_D - \sigma_1^+ - 18 \mu = 0$$

$$12 \theta_A + 15 \theta_B + 18 \theta_C + 13 \theta_D - \sigma_2^+ - 15 \mu = 0$$

$$\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D, \sigma_1^-, \sigma_2^-, \sigma_3^-, \sigma_1^+, \sigma_2^+ \geq 0$$

Modelin çözümü yapıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir:

$$F_B = 1, \mu = 1, \theta_A = 1, \theta_B = 0, \theta_C = 0, \theta_D = 0$$

$$\sigma_1^- = 0, \sigma_2^- = 0, \sigma_3^- = 0, \sigma_1^+ = 0, \sigma_2^+ = 0$$

Elde edilen sonuçlara bakıldığında B bankasının, görelî etkinlik değeri %100 olduğu görülmektedir. Kurulan çıktıya yönelik zarflamalı VZA modelinde, B bankası, karar birimlerinin etkin olabilmesi için gereken tüm koşulları sağlamaktadır. Yani B bankası, A, C ve D bankalarının oluşturduğu gözlem kümesi içerisinde görelî etkinliğe sahiptir.